

Internet Electronic Journal*

Nanociencia et Moletrónica

Diciembre 2006, Vol. 4, N°3, pp. 753-766

Dinámica no lineal del ADN y su relación con los solitones

Parte II: Efecto de desnaturalización reversible e irreversible de solitones

E. Villagran, L. Morales¹, R. Peña, V. Serkin

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Centro de Química-ICUAP
Módulo 193, Complejo de Ciencias, Ciudad Universitaria, Apdo. 1613, CP 72570

¹Facultad de Ciencias Químicas. BUAP.
Puebla, Pue., México; Tel. + (222) 2 29 55 00, ext. 7284
e-mail: vserkin@hotmail.com

recibido: 06 Septiembre 2006

revisado: 30 Septiembre 2006

publicado: 15 de Noviembre de 2006

Citation of the article:

E. Villagran, L. Morales¹, R. Peña, V. Serkin, Dinámica no lineal del ADN y su relación con los solitones Parte II: Efecto de desnaturalización reversible e irreversible de solitones, Internet Electrón. J. Nanocs. Moletrón. 2006, Vol. 4, N° 3., pp. 753-766

copyright © BUAP 2006

<http://www.revista-nanociencia.ece.buap.mx>

Dinámica no lineal del ADN y su relación con los solitones

Parte II: Efecto de desnaturalización reversible e irreversible de solitones

E. Villagran, L. Morales¹, R. Peña, V. Serkin

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Centro de Química-ICUAP
Módulo 193, Complejo de Ciencias, Ciudad Universitaria, Apdo. 1613, CP 72570

¹ Facultad de Ciencias Químicas. BUAP.
Puebla, Pue., México; Tel. + (222) 2 29 55 00, ext. 7284
e-mail: vserkin@hotmail.com

recibido: 06 Septiembre 2006

revisado: 30 Septiembre 2006

publicado: 15 de Noviembre de 2006

Internet Electron. J. Nanoc. Moletrón. 2006, Vol. 4, No.3, pags. 753-766

Resumen

En el presente artículo se presenta un modelo bidimensional para el ADN. Por medio del método de múltiples escalas se llega a la ecuación no lineal de Schroedinger. Al sistema se lo perturba con un potencial armónico externo y por medio de la teoría de la perturbación adiabática se obtienen las soluciones, encontrando el efecto de desnaturalización reversible e irreversible de solitones. Sugerimos que este desarrollo puede emplearse como un modelo simple para la explicación del proceso de desnaturalización del ADN.

1 Introducción

La dinámica de la transcripción del ADN es uno de los problemas más fascinantes en la biología molecular moderna debido a que este proceso es la base de la vida. Sin embargo es también un problema muy complicado debido al complejo papel que juega la RNA polimerasa en el proceso. Ya ha quedado bien establecido [1] que la desnaturalización local del ADN está involucrada en el proceso, así que es interesante investigar la desnaturalización de la doble hélice como un paso preliminar en el entendimiento de la transcripción. La posibilidad de que los efectos no lineales pudieran concentrar energía vibracional en el ADN fue desarrollada inicialmente por Krumhansl y colaboradores [2-4] quienes sugirieron una teoría de excitaciones solitónicas como explicación de los estados abiertos del ADN. Estudios relacionados con solitones en el ADN también fueron presentados por Yomosa [5], quien propuso una teoría usando un modelo de bases planas giratorias. Este modelo fue refinado después por Takeno y Homma [6] quienes introdujeron efectos de discreticidad, y por Zhang [7] quien mejoró el modelo para el acoplamiento de bases. M. Peyrard y A.R. Bishop [8-9] investigaron la mecánica estadística de un modelo de red simple para la desnaturalización del ADN de doble hélice. En el presente artículo se presenta un modelo bidimensional para el ADN. Por medio del método de múltiples escalas se llega a la ecuación no lineal de Schroedinger. Al sistema se lo perturba con un potencial armónico externo y por medio de la teoría de la perturbación adiabática se obtienen las soluciones, encontrando el efecto de desnaturalización reversible e irreversible de solitones. Sugerimos que este desarrollo puede emplearse como un modelo simple para la explicación del proceso de desnaturalización del ADN.

2 Derivación de la ecuación No lineal de Schroedinger para el Modelo de ADN

La Hamiltoniana del sistema es [8-9]:

$$H' = \sum_n \frac{1}{2} \left(\frac{dY_n}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} S(Y_n - Y_{n-1})^2 + (e^{-Y_n} - 1) . \quad (1)$$

Partiendo de las ecuaciones de movimiento del modelo que derivan de (1),

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 Y_n}{d\tau^2} + S(Y_{n+1} + Y_{n-1} - 2Y_n) + 2e^{-Y_n} (e^{-Y_n} - 1). \quad (2)$$

Estas forman un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que no tienen solución exacta. Ahora introducimos una expansión de pequeña amplitud¹² que sólo mantenga las primeras no linealidades, definiendo:

$$Y_n = \varepsilon \phi_n \quad (3)$$

con $\varepsilon \ll 1$

y manteniendo solo los términos importantes en la expansión,

$$\frac{d^2 \phi_n}{d\tau^2} = S(\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - 2\phi_n) - 2 \left(\phi_n - \frac{3}{2} \varepsilon \phi_n^2 + \frac{7}{6} \varepsilon^2 \phi_n^3 \right) = 0. \quad (4)$$

Se puede ahora buscar soluciones de este conjunto de ecuaciones, que se prolongue más allá de las soluciones de simples ondas planas que tendríamos en una aproximación lineal, esas soluciones serían de la forma

$$\phi_n(\tau) = (F_n e^{i\theta_n} + F_n^* e^{-i\theta_n}) + \varepsilon (G_n + H_n e^{2i\theta_n} + H_n^* e^{-2i\theta_n}) \quad (5)$$

con $\theta_n = qn - \omega t$. La elección de los términos adicionales será justificada después pero es fácil comprender su origen: dado que las ecuaciones contienen un término $\varepsilon \phi_n^2$, la presencia del término dominante en la solución (5) proporcional a $e^{\pm i\theta_n}$ generará naturalmente términos similares al factor ε en la solución, esto es, sin una contribución exponencial o dependiendo de $e^{\pm 2i\theta_n}$, más aún, como la solución (5) aparece como una onda plana modulada, la cual en el límite armónico mantendrá una amplitud fija, es natural suponer que los coeficientes F_n, G_n, H_n tendrán sólo una suave dependencia espacial cuando la no linealidad sea incluida. Se asumiría que esas funciones dependan solo de variables "lentas" $X_1 = \varepsilon x$, $X_2 = \varepsilon^2 x$, $T_1 = \varepsilon \tau$, $T_2 = \varepsilon^2 \tau$ y su dependencia espacial estaría más bien descrita por una aproximación al límite continuo, las cuales ascienden a reemplazar las funciones en los sitios $n \pm 1$ por su expansión de Taylor

$$F_{n\pm 1} = F \pm \varepsilon \frac{\partial F}{\partial X_1} \pm \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial X_2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2}. \quad (6)$$

Las derivadas temporales de esas expresiones son de la forma

$$\frac{\partial F_n}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial T_2} \quad (7)$$

con ecuaciones similares para G y H .

Al introducir esas expresiones en las ecuaciones de movimiento, hasta orden ε^0 , la cancelación de los términos en $\exp(\pm i\theta_n)$ muestra que las ecuaciones son satisfechas si ω y q están relacionadas por la relación de dispersión que se tiene para ondas planas en el límite armónico

$$\omega^2 = 2 + 4S \text{sen}^2 \frac{q}{2} \quad (8)$$

Esta es la relación de dispersión que corresponde a una red discreta, lo que significa que a pesar de la aproximación del límite continuo llevado a cabo para las funciones F , G y H , los cálculos preservan cierta discreticidad, lo cual es importante para el ADN. Es por ello que esta aproximación es llamada la semidiscreta.

En orden ε^1 , la cancelación de términos en $\exp(\pm i\theta_n)$ da

$$\frac{\partial F}{\partial T_1} + v_g \frac{\partial F}{\partial X_1} = 0 \quad (9)$$

donde

$$v_g = \frac{S \text{sen} q}{\omega} \quad .$$

u_g es la velocidad de grupo de las ondas que tienen relación de dispersión (8). En el mismo orden, los términos sin una dependencia exponencial y términos en $\exp(2i\theta_n)$ dan

$$G = 3F F^*$$

$$H = -\frac{1}{2} \frac{F^2}{1 + \left(\frac{8S}{3}\right) \text{sen}^4\left(\frac{q}{2}\right)} \quad (10)$$

Se puede notar que los términos G y H en la solución (5) son necesarios para permitir la cancelación de los términos en orden ε^1 en las ecuaciones de movimiento. La ecuación más interesante se obtiene con la cancelación de términos en $\exp(i\theta_n)$ para orden ε^2 En un marco móvil a velocidad u_g se reduce a la ecuación NLS,

$$i \frac{\partial F}{\partial \tau_2} + \frac{P \partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + Q |F|^2 = 0 \quad (11)$$

donde los coeficientes P y Q dependen del vector de onda q de la onda portadora de acuerdo con

$$P = \frac{S\omega^2 \cos q - S^2 \text{sen}^2 q}{2\omega^3} \quad (12)$$

$$Q = \frac{1}{2\omega} \left(11 - \frac{9}{3 + 8S \sin^4\left(\frac{q}{2}\right)} \right). \text{El producto } PQ \text{ es positivo para toda } q < \frac{\pi}{2} \text{ así que es posible}$$

esperar soluciones localizadas cuando la onda portadora tiene un pequeño vector de onda. Al sistema (11) podemos someterlo a una perturbación de tipo potencial armónico externo para simular el efecto del entorno del ADN.

$$i \frac{\partial F}{\partial \tau_2} + \frac{P \partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + Q|F|^2 = i\varepsilon(F). \quad (13)$$

La solución de la ecuación se obtiene vía la teoría de la perturbación adiabática.

3 Teoría de la Perturbación Adiabática

Ahora tomemos a la ecuación (11), pero considerando una pequeña perturbación, tal ecuación, sin pérdida de generalidad se puede escribir:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = i\varepsilon(u) \quad (14)$$

En general, $\varepsilon(u)$ es una pequeña perturbación que depende de u , $u_{,}$, y sus derivadas [10-19]. En ausencia de perturbación, ($\varepsilon = 0$), la solución solitónica de la NLS es conocida y está dada por

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}[\eta(\tau - \tau_s + \delta\xi)] \exp[i(\eta^2 - \delta^2)\xi/2 - i\delta\tau + i\phi_s] \quad (15)$$

que es la forma general del solitón fundamental, donde η , δ , τ_s , y ϕ_s son cuatro parámetros arbitrarios que caracterizan al solitón. Así que, (11) soporta una familia de solitones fundamentales de cuatro parámetros, todos compartiendo la condición $N = 1$.

La cuestión ahora es, lo que sucede cuando ($\varepsilon \neq 0$). Varias técnicas de perturbación han sido desarrolladas para responder esta pregunta [14-17]. Todas ellas asumen que la forma funcional del solitón permanece intacta ante la presencia de una pequeña perturbación pero los cuatro parámetros solitónicos cambian con ξ a medida que el solitón se propaga a lo largo de la fibra. Así, la solución de la NLS perturbada (14) puede escribirse en forma de solitones con parámetros dinámicos variables (amplitud, posición del centro de masa, fase y velocidad)

$$u(\xi, \tau) = \eta(\xi) \operatorname{sech}[\eta(\xi)(\tau - q(\xi))] \exp[i\phi(\xi) - i\delta(\xi)\tau]. \quad (16)$$

La dependencia de ξ que tienen η , δ , q , y ϕ es lo que hay que determinar. En ausencia de perturbación, ($\varepsilon = 0$), η y δ son constantes, pero $q(\xi)$ y $\phi(\xi)$ son obtenidas al resolver ecuaciones diferenciales simples

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta, \quad \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2) . \quad (17)$$

Dentro del marco de la teoría de la perturbación adiabática para solitones esos cuatro parámetros están descritos por el sistema de ecuaciones [10-19]

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) u^*(\tau) d\tau \quad (18)$$

$$\frac{d\delta}{d\xi} = -\text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \tanh[\eta(\tau - q)] u^*(\tau) d\tau \quad (19)$$

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta + \frac{1}{\eta^2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) (\tau - q) u^*(\tau) d\tau \quad (20)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \left\{ \frac{1}{\eta} - (\tau - q) \tanh[\eta(\tau - q)] \right\} u^*(\tau) d\tau + \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2) + q \frac{d\delta}{d\xi} . \quad (21)$$

Para un potencial parabólico de interacción, de las ecuaciones (18)-(21) obtenemos

$$\frac{d\delta}{d\xi} = \Omega^2 q, \quad \frac{dq}{d\xi} = -\delta \quad (22)$$

que conducen a dos ecuaciones del oscilador armónico

$$\frac{d^2 q}{d\xi^2} = \Omega^2 q, \quad \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} = -\Omega^2 \delta \quad (23)$$

cuyas soluciones tienen la forma

$$q(\xi) = q_0 \cos(\Omega \xi) - \frac{\delta_0}{\Omega} \sin(\Omega \xi) \quad (24)$$

$$\delta(\xi) = q_0 \Omega \sin(\Omega \xi) - \delta_0 \cos(\Omega \xi) \quad (25)$$

donde los parámetros con el índice "0" corresponden a valores iniciales de la velocidad δ y el centro de masa del solitón q .

4 Potencial armónico externo

Si ahora en calidad de condición inicial se expresa el par de solitones

$$u_{1,2}(\xi, \tau) = \eta_{1,2}(\xi) \operatorname{sech}[\eta_{1,2}(\xi)(\tau - q_{1,2}(\xi))] \exp[i\phi_{1,2}(\xi) - i\delta_{1,2}(\xi)\tau] \quad (26)$$

Introduciendo (26) en (14) obtenemos el siguiente modelo de excitaciones NLS para dos solitones

$$i \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + |u_1|^2 u_1 = \frac{1}{2} \Omega^2 \tau^2 u_1 - 2|u_1|^2 u_2 - u_1^2 u_2^* \quad (27)$$

$$i \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + |u_2|^2 u_2 = \frac{1}{2} \Omega^2 \tau^2 u_2 - 2|u_2|^2 u_1 - u_2^2 u_1^* \quad (28)$$

Los tres términos de las partes derechas de (27), (28) describen el confinamiento (captura) de los solitones en la trampa parabólica y la interacción no-lineales entre solitones que se superponen. Notamos, que dependiendo del signo del parámetro Ω^2 las ecuaciones (27), (28) describen ya sea el potencial de confinamiento (pozo), o bien el potencial repulsivo (barrera). Después de transformaciones similares a (18)-(21) finalmente, obtenemos la siguiente ecuación, que describe la dinámica de interacción del par de solitones de Schroedinger de la NLS en un potencial armónico:

$$\frac{d^2 q}{d\xi^2} = -\Omega^2 q - 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi \quad (29)$$

donde $q = \frac{(q_1 - q_2)}{2}$ es la distancia y $\varphi = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{2}$ es la fase entre los solitones.

5 Potencial no estacionario

Asumiendo una adiabaticidad de la dinámica del solitón NLS en una trampa parabólica se permite estudiar procesos más complejos, que surgen en los potenciales armónicos no-estacionarios, cuando el parámetro Ω resulta ser función del tiempo. Utilizando (18)-(21), no es difícil obtener la siguiente ecuación para la coordenada del centro de gravedad del solitón:

$$\frac{d^2 q}{d\xi^2} + \Omega^2(\xi) q = 0 \quad (30)$$

Es bien sabido que la ecuación (30) con potencial dependiente del tiempo en la forma:

$$\Omega^2(\xi) = a \exp(\lambda \xi) \quad (31)$$

admite soluciones analíticas exactas, que se expresan por medio de las funciones de Bessel de primero ($J_\nu(z)$) y de segundo orden ($Y_\nu(z)$)

$$q(\xi) = C_1 J_0 \left[\frac{2\sqrt{a}}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) \right] + C_2 Y_0 \left[\frac{2\sqrt{a}}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) \right] \quad (32)$$

La función del tipo (32) permite imitar la conexión y desconexión de la trampa de potencial armónico con dependencia del signo del parámetro λ . Los resultados típicos de los cálculos numéricos de la dinámica del solitón en este caso, están representados en la figura 1. Como también era de esperar, el periodo de oscilaciones del solitón NLS en una trampa armónica disminuye cuando se incrementa la frecuencia efectiva del oscilador en el tiempo, y por el contrario, para la desconexión del potencial, la amplitud y el periodo de oscilación del solitón aumentan.

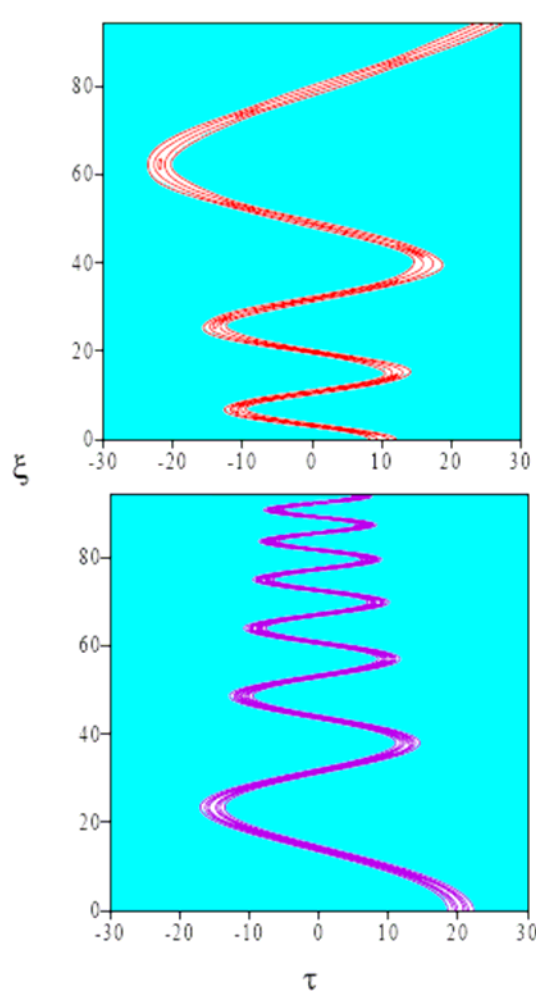


Figura 1: Dinámica del solitón para un "encendido" y "apagado" adiabático del potencial armónico según la ley exponencial $\Omega^2(\xi) = a \exp(\lambda\xi)$ para $\Omega = 0.1$, $R = 1.0$, $\lambda = -0.05$ (en color rojo) y 0.05 (en color violeta).

Mostraremos, que la llamada transformación de Miura, conocida en la teoría de solitones (ver p.ej [10]),

$$\mu(\xi) = \frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi} - v^2(\xi) = \Omega^2(\xi) \quad (33)$$

permite obtener soluciones analíticas simples para la ecuación (33) en la forma

$$q(\xi) = \exp \left[- \int_0^{\xi} v(z) dz \right] \quad (34)$$

donde la función de control arbitraria $v(z)$ debe satisfacer las condiciones de integrabilidad y diferenciabilidad. Realmente, no es difícil convencerse, que al introducir (34) en (33) da la identidad bajo la condición (30).

Las soluciones exactas (33) y (34) permiten proponer el método para el control de la dinámica de los breathers, esto es, de los estados ligados de los solitones NLS en una trampa de potencial armónico variable con el tiempo.

La variación temporal de la trampa de potencial permite notar el efecto de la "desnaturalización" reversible e irreversible de los solitones, en el cual el periodo de oscilaciones de los solitones NLS cambia en una manera controlable en un potencial no-estacionario hasta la completa separación o desintegración del estado ligado figura 2 . En los cálculos fueron utilizadas las siguientes funciones $\Omega^2(\xi)$: en la forma $\exp(-\beta\xi)$, $1 - \exp[-\beta(\xi - \xi_0)^n]$, y $\tanh^2(\xi - \xi_0)$. Estas funciones permitieron modelar el "encendido" y "apagado" de la trampa armónica, y además la acción de tiempo limitado sobre el potencial de atracción.

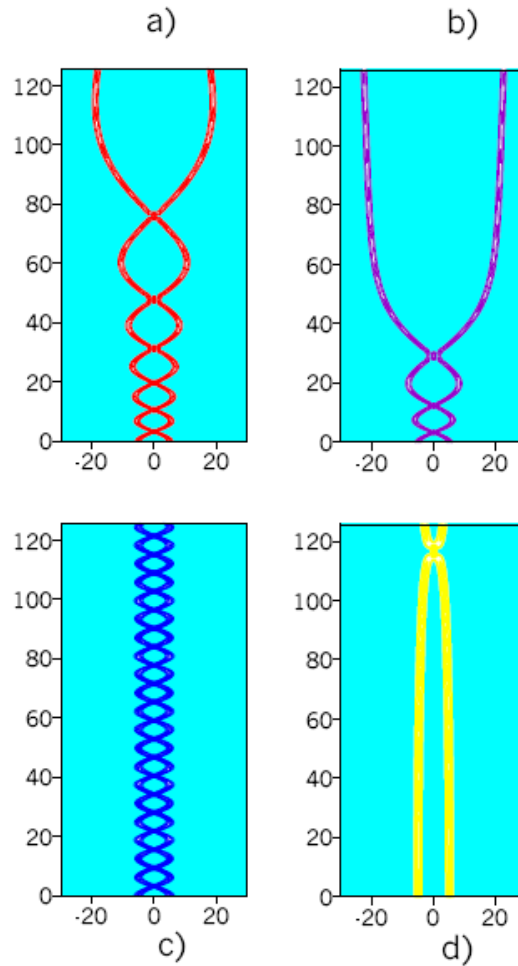


Figura 2: Efecto de la "desnaturalización de solitones": a, b dinámica de decaimiento del estado ligado de dos solitones NLS en fase en un potencial armónico. Cálculos para $\Omega = 0.5$, $R = 1.0$, $q = 5$, $\beta = -0.05$ (color rojo) (a) y -0.1 (color violeta) (b). en (c) (color azul) se presenta la dinámica de dos solitones con el parámetro $\beta = 0$ en potencial armónico, y en la figura (d) (color amarillo) se presenta la dinámica de dos solitones sin confinamiento y sin potencial armónico.

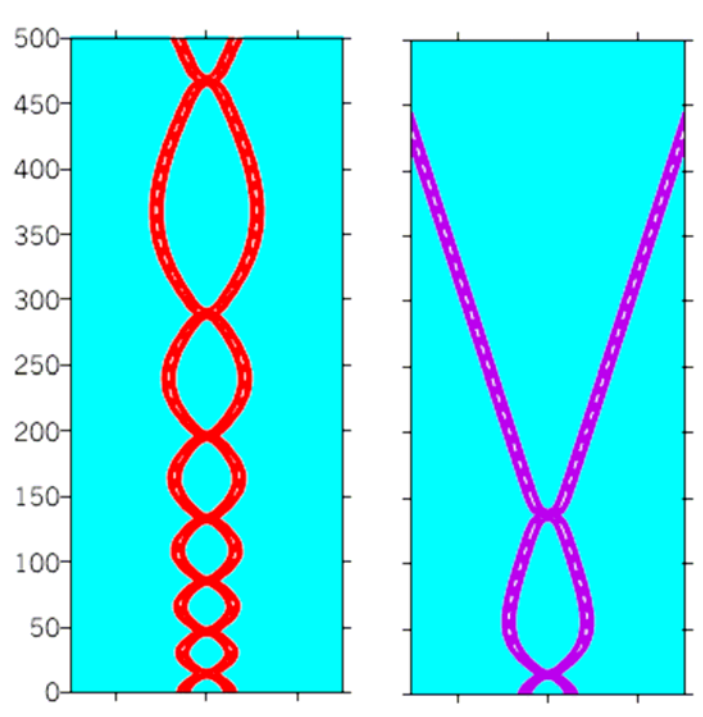


Figura 3: Efecto de la "desnaturalización de solitones": para el parámetro $\beta = 0.1$ (color rojo), para el parámetro $\beta = 0.5$ (color violeta) en un potencial armónico.

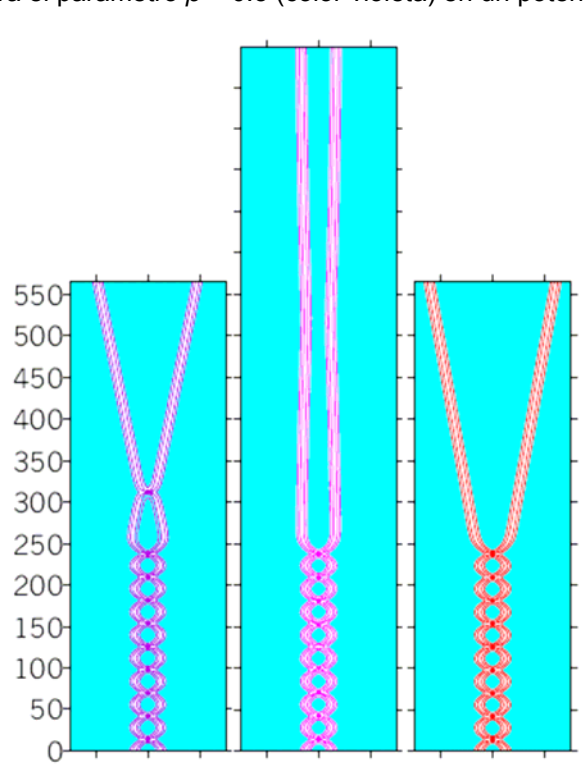


Figura 4. En los cálculos fue utilizada la función $\Omega^2(\xi)$ en la forma $1 - \exp[-\beta(\xi - \xi_0)^n]$ con tres parámetros $\beta = 0.01$, $\beta = 0.025$ y $\beta = 0.05$.

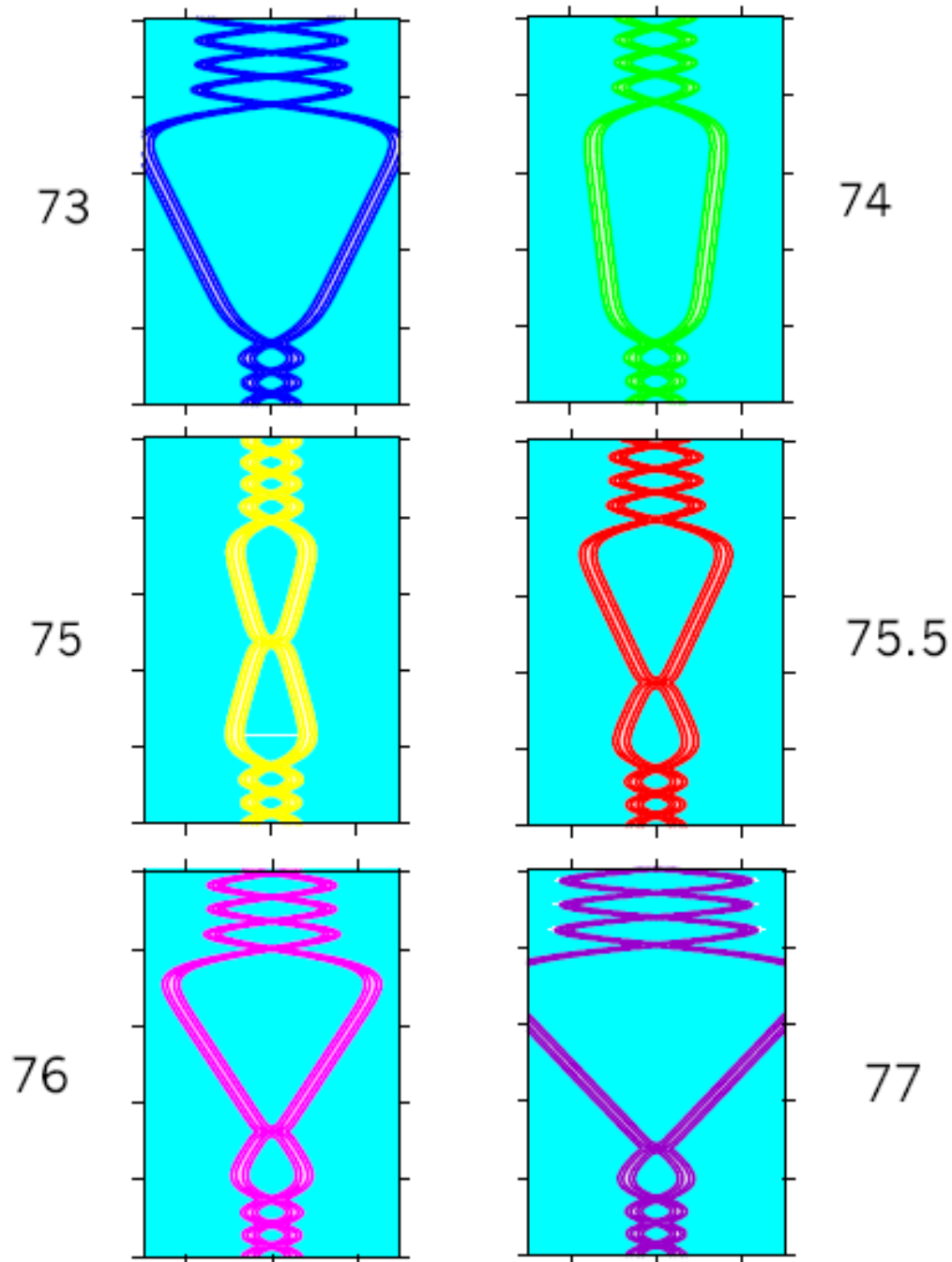


Figura 5. Cálculos del proceso de desnaturalización para la función $\tanh^2(\xi - \xi_0)$ en diferentes momentos de tiempo de encendido y apagado del potencial armónico.

En todas las figuras iniciamos con un potencial armónico y con un par de solitones acoplados en potencial. A continuación se apaga el potencial en diferentes momentos de tiempo adimensionales (usamos aquí tiempo de periodo de solitones para detalles y referencias consultar [10-19].)

En la figura 5 el número (ejemplo 73) corresponde al tiempo de apagado del potencial, dependiendo de este momento es posible ver la diferencia en la dinámica del proceso de desnaturalización de los solitones acoplados. Como un resultado del encendido nuevamente del potencial armónico tenemos que el resultado de la dinámica de la desnaturalización es "reversible". En todos los experimentos usamos los parámetros del potencial armónico $\Omega = 0.1$ y $R = 1.0$.

Conclusiones

Al plantear un modelo del ADN se ha llegado a la NLS. Se ha sometido a la acción de un potencial externo de tipo armónico y, por medio de la teoría de la perturbación adiabática, se ha obtenido su solución. Para el caso de un potencial armónico no estacionario, se ha obtenido que efectivamente se tiene un efecto de desnaturalización reversible e irreversible del solitón, que en este caso es el análogo de una de las hebras de la molécula. Por tanto concluimos que un potencial externo de este tipo puede jugar el papel del "ambiente" de la molécula y, bajo ciertas condiciones, promover la separación de las cadenas del ADN, dando con ello lugar al proceso de desnaturalización.

Referencias

- [1] Freifelder J; Molecular Biology (Jones and Bartlet, Boston, 1987).
- [2] Englander S.W., Kallenbach, N.R., Heeger, A.J., Krumhansl, J.A. and Litwin, S., Proc. Natl. Acad. Sci (U.S.A.) 77, 7222 (1980).
- [3] Krumhansl J.A. and Alexander, D.M., in Structure and Dynamics: Nucleic Acids and Proteins, edited by E. Clementi and R.H. Sarma (Adenine, New York, 1983), pp. 61-80.
- [4] Krumhansl J.A., Wysin, G.H., Alexander, D.M., Garcia, A., Lombdal, P. S. and Layne, S.P. in Structure and Motion in Membranes, Nucleic Acids and Proteins, edited by M.H. Sarma and R.H. Sarma (Adenine, New York, 1985), pp. 407-415.
- [5] Yomosa S. J., Phys. Soc. Jpn. 51, 3318 (1982); 52, 1866 (1983); Phys. Rev. A 27, 2120 (1984); 30, 474 (1984).
- [6] Takeno y Homma, Prog. Theor. Phys. 70, 308 (1983).
- [7] Zhang L.T., Phys Rev. A 35, 886 (1987).
- [8] Peyrard M. and Bishop, A.R., Phys. Rev. Lett. 62 (23) , 2755-2758, (1989).
- [9] Peyrard M. Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA. Nonlinearity, 17. R1-R40.
- [10] Govind P. Agrawal. (En Nonlinear Fiber Optics. Academic Press. 2001).
- [11] Karpman V.I. and Maslov E. M. Sov. Phys. JETP 46, 281 (1977).
- [12] Kaup D. J. and Newell A.C. Proc. R. Soc: London Ser, A, 361 413, (1978).
- [13] Karpman V.I., Sov. Phys. JETP 50, 58 (1979).
- [14] Kivshar Y. S. and Malomed B.A. Rev. Mod. Phys. 61, 763 (1989).
- [15] Karpman V.I., Lett. to JETP, 25,296 (1997).
- [16] Karpman V.I., Maslov E.M., JETP, 73,537 (1997).
- [17] Karpman V.I., Maslov E.M., Phys. Lett. A., 61, 355 (1977).
- [18] Karpman V.I., Physica Scripta, 20,462 (1979).
- [19] Karpman V.I., Solov'ev V.V. Physica D., 3, 487 (1981)